

### Exercice 3

6 points

Le but de cet exercice est d'étudier les convergences de deux suites vers une même limite.

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[2; +\infty[$  par

$$f(x) = \sqrt{3x-2}.$$

1. Justifier les éléments du tableau de variations ci-dessous :

$x$	2	$+\infty$
$f(x)$	2	$+\infty$

On admet que la suite  $(u_n)$  vérifiant  $u_0 = 6$  et, pour tout  $n$  entier naturel,  $u_{n+1} = f(u_n)$  est bien définie.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n$  entier naturel :  $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$ .  
b. En déduire que la suite  $(u_n)$  converge.

3. On appelle  $\ell$  la limite de  $(u_n)$ .

On admet qu'elle est solution de l'équation  $f(x) = x$ . Déterminer la valeur de  $\ell$ .

4. On considère la fonction `rang` écrite ci-dessous en langage Python.

On rappelle que `sqrt(x)` renvoie la racine carrée du nombre  $x$ .

```

1 from math import *
2
3 def rang(a) :
4     u = 6
5     n=0
6     while u >= a :
7         u = sqrt(3*u - 2)
8         n = n+1
9     return n

```

- Pourquoi peut-on affirmer que  $\text{rang}(2.000001)$  renvoie une valeur?
- Pour quelles valeurs du paramètre  $a$  l'instruction  $\text{rang}(a)$  renvoie-t-elle un résultat?

### Partie B

On admet que la suite  $(v_n)$  vérifiant  $v_0 = 6$  et, pour tout  $n$ , entier naturel,  $v_{n+1} = 3 - \frac{2}{v_n}$  est bien définie.

- Calculer  $v_1$ .
- Pour tout  $n$  entier naturel, on admet que  $v_n \neq 2$  et on pose :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$

- Démontrer que la suite  $(w_n)$  est géométrique de raison 2 et préciser son premier terme  $w_0$ .
- On admet que, pour tout  $n$  entier naturel,

$$w_n - 1 = \frac{1}{v_n - 2}.$$

En déduire que, pour tout  $n$  entier naturel,

$$v_n = 2 + \frac{1}{1,25 \times 2^n - 1}$$

- Calculer la limite de  $(v_n)$ .
- Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  pour lequel  $v_n < 2,01$  en résolvant l'inéquation.

### Partie C

À l'aide des parties précédentes, déterminer le plus petit entier  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , les termes  $v_n$  et  $u_n$  appartiennent à l'intervalle  $]1,99; 2,01[$ .